التمرين الأول : (04 نقط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+4}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n+4}$

2) أ) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $-2 < U_n < 1$

ب) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ) هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي : $V_n = \frac{U_n+2}{1-U_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

جـ) احسب المجموع : $S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{5}{V_1} + \frac{5^2}{V_2} + \cdots + \frac{5^n}{V_n}$

التمرين الثاني : (04 نقط)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,4,-5)$, $B(3,2,-4)$,
$C(5,4,-3)$ و $D(-2,8,4)$ و الشعاع $\vec{u}(1,5,-1)$.

1) بين أن $x - 2z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D و يوازي $\vec{u}$.

3) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة : $x - y - z - 7 = 0$

أ) بين أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي : $t \in R$ $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$

ب) بين أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

4) أ) تعطى النقطتان $E(3,0,-4)$ و $F(-3,3,5)$, تحقق أن $E \in (\Delta)$ و $F \in (T)$.

ب) عين (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE} = \alpha$ مع α عدد حقيقي .

ج) عين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

التمرين الثالث : (05 نقط)

نعتبر كثير حدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$

1) أ) بين أن $P(z)$ يقبل جذرا تخيلا صرفا يطلب تعيينه .

ب) عين العددين الحقيقيين a و b حيث $P(z) = (z-i)(z^2 + a\,z + b)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2) المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط C , B , A ذات اللواحق على الترتيب:

$$Z_C = \overline{Z}_B \quad , \quad Z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad , \quad Z_A = i$$

أ) بين أن النقط A , B , C تنتمي الى دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) بين أن OABC معين.

3) نضع $Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ لاحقة النقطة A_1 . Z_n لواحق النقط A_n حيث $Z_n = (Z_1)^n$ ولتكن النقطة A_0 صورة العدد المركب 1.

أ) احسب Z_2 ثم مثل النقط A_0 , A_1 , A_2 في المعلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$, (الوحدة $2\,cm$)

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n النقط A_n تنتمي الى الدائرة (C) .

جـ) برهن أن : $Z_{n+1} - Z_n = (Z_1)^n \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

د) استنتج طويلة $Z_{n+1} - Z_n$ ثم المسافة A_nA_{n+1} ثم أثبت أن المثلثات OA_nA_{n+1} متقايسة الأضلاع.

4) نعتبر f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z + i\sqrt{3}$

أ) عين طبيعة التحويل f واذكر عناصره المميزة.

ب) عين وانشئ صورة المثلث OA_1A_2 بالتحويل f .

<u>التمرين الرابع</u> : (07 نقط)

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (وحدة الطول $1\,cm$).

1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$

ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها.

جـ) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d).

4) ارسم (d) , (T) و (C_f).

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.

ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 2$ و $x = 0$.

التمرين الاول (04 نقاط)

-1

$$U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+4}\quad ;\quad U_0=\frac{1}{4}$$

تعيين a و b في :

$$U_{n+1}=a+\frac{b}{U_n+4}$$

و منه :

$$U_{n+1}=\frac{a(U_n+4)+b}{U_n+4}$$ 0.5

$$\begin{cases}a=3\\4a+b=2\end{cases}\quad\begin{cases}a=3\\b=-10\end{cases}$$

$$U_{n+1}=3-\frac{10}{U_n+4}$$

-2

أ) باستعمال البرهان بالتراجع

$$-2<U_n<1$$

نتحقق:

$$P(0):\ -2<U_0<1$$ 0.75

نفرض:

$$-2<U_n<1$$

نبرهن أنها صحيحة ن أجل $n+1$

ب) المتتالية U_n متزايدة تماما على N لان:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-(U_n-1)(U_n+2)}{U_n+4}$$

وبما أن $U_n<1$ فإن $U_n-1<0$ و

$U_n>-2$ فإن $U_n+2>0$ فان 0.75

وعليه فان: $-(U_n-1)(U_n+2)>0$:

ولدينا كذلك $U_n+4>0$ ومن ثم فإن

$$U_{n+1}-U_n>0$$

جـ) المتتالية (U_n) متقاربة لأنها متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 0.25

3) أ) (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ وحدها الأول $U_0=3$ 0.5

ب) $V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$ 0.25

$$U_n=\frac{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n}$$ 0.25

ج) حساب المجموع:

$$V_0=3$$

$$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$V_1=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2$$ 0.25

.

$$V_n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

نعوض نجد :

$$S_n=\frac{1}{3}(1+2+2^2+\cdots+2^n)$$ 0.5

$$S_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$$

التمرين الثاني (04 نقط)

1) $A\in(ABC)\,;\ B\in(ABC)\,;\ C\in(ABC)$ 0.75

2) $\begin{cases}x=k-2\\y=5k+8\\z=-k+4\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$ 0.5

3)

أ) نحل الجملة $\begin{cases}x-2z-11=0\\x-y-z-7=0\end{cases}$ 0.5

ب) ندرس التوازي :

$\vec{u}(1,5,-1)$, $\vec{v}(2,1,1)$, $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{5}$ ومنه (T) و

(Δ) غير متوازيان. 0.25

ندرس التقاطع معناه نحل الجملة:

$$\begin{cases}2t+11=k-2\\t+4=5k+8\\t=-k+4\end{cases}$$ 0.5

نعوض t في المعادلة 2 نجد $k=0$ ثم نعوض في المعادلة 3 نجد $t=4$ ثم نعوض هذه القيم في المعادلة1

نجد : $-2=19$ و هذا مستحيل.

إذا (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوى.

-4 أ)

$$E\in(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}3=11+2t\\0=4+t\\-4=t\end{cases}$$ 0.25

$$\begin{cases}t=-4\\t=-4\\t=-4\end{cases}$$ نجد t وحيد

$$F\in(T)\Leftrightarrow\begin{cases}-3=k-2\\3=5k+8\\5=4-k\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=-1\\k=-1\\k=-1\end{cases}$$ نجد k وحيد 0.25

ب) (Γ) : $-6x+3y-9z+54-\alpha=0$ 0.5

و هي معادلة ديكارتيه للمستوي الذي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

جـ) $I\left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ منتصف القطعة $[EF]$. 0.5

$I\in(\Gamma)$ بعد التعويض نجد $\alpha=63$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1) أ) $P(\alpha i)=0$ — 0.25

نجد $\alpha=1$ و منه $P(i)=0$

ب)

$$\begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=1 \end{cases}$$ 0.5

حلول المعادلة هي:

$$\left\{i;\ \frac{-\sqrt{3}-i}{2};\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right\}$$ 0.5

2) أ) نحسب:

$|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=1$ — 0.25

ومنه النقط A,B,C تنتمي الى دائرة مركزها المبدأ O ونصف قطرها 1 — 0.25

نبين أن

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB} \\ OA=OC \end{cases}$$ 0.5

ومنه الرباعي $OABC$ معين

3) أ) حساب

$$Z_2=Z_1{}^2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$$ 0.25

التمثيل البياني — 0.25

ب)باستعال البرهان بالتراجع :

نتحقق : من أجل $n=0$: $OA_0=1$ ومنه $A_0\in(C)$ — 0.5

نفرض أن: $A_n\in(C)$ ونبرهن أن $A_{n+1}\in(C)$ أي

$OA_{n+1}=1$ لدينا $A_n\in(C)$ معناه :

$OA_n=1$ أي $|Z_n|=|Z_1{}^n|=|Z_1|^n=1$

$OA_{n+1}=|Z_1{}^{n+1}|=|Z_1{}^n|\times|Z_1|=1$

ومنه النقط A_{n+1} تنتمي الى الدائرة (C)

جـ) نبرهن أن:

$$Z_{n+1}-Z_n=Z_1{}^{n+1}-Z_1{}^n=Z_1{}^n(Z_1-1)=Z_1{}^n\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$ 0.25

د) — 0.25

$|Z_{n+1}-Z_n|=1$

المسافة:

$A_nA_{n+1}=|Z_{n+1}-Z_n|=1$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n — 0.25

$OA_n=OA_{n+1}=1$

و

$A_nA_{n+1}=1$

و منه المثلثات OA_nA_{n+1} متقايسة الأضلاع .

4) أ) f تشابه مباشر مركزه النقطة A_0 ذات اللاحقة 1 نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ — 0.5

ب) صورة المثلث OA_1A_2 هو المثلث $O'A'_1A'_2$ حيث

$O'=f(O)$, $O'(0,\sqrt{3})$ — 0.5

$A'_1=f(A_1)$, $A'_1(2,\sqrt{3})$

$A'_2=f(A_2)$, $A'_2(1,2\sqrt{3})$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. 1) نحسب المشتقة: $g'(x)=e^{x-2}-1$ — 0.25

جدول التغيرات: — 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘	0	↗

0.25

2) اشارة : $g(x)\geq 0$ — 0.25

II.

1) أ) النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 0.25

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ — 0.25

ب)

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$ — 0.25

جـ) وضعية C_f بالنسبة الى (d) — 0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	أسفل	يقطع	أعلى

2) حساب المشتقة : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x-2}}$ — 0.5

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة تماما على R — 0.25

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25

3) أ) معناه نحل المعادلة : $f(x)=0$ — 0.5

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة.

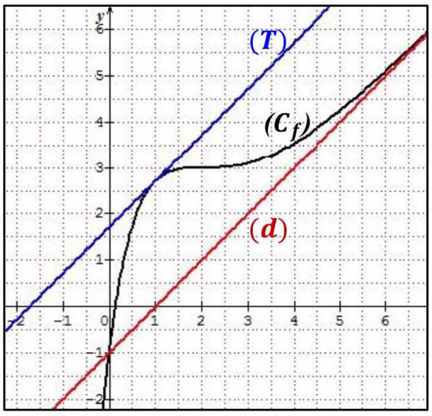
ب) نحسب المشتقة الثانية $f''(x)=0$ — 0.5

اذن المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف $I(2,3)$

جـ) معادلة المماس (T) الذي يوازي (d) هي: — 0.5

$y=x-1+e$

5) التمثيل البياني — 0.5



0.25

0.25

		5) <u>المناقشة البيانية:</u> $f(x) = x + m$ $m < -1$ المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا $m = -1$ المعادلة تقبل حلا و هو معدوم $-1 < m < e - 1$ حلين موجبين تماما $m = e - 1$ حلا واحدا موجبا $m = e - 1$ ليس لها حلول	0.5
		6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نضع : $U(x) = x$ و $V'(x) = e^{2-x}$ $H(x) = (-x - 1)e^{2-x}$	0.5
		ب) حساب A: $A = \int_0^2 (f(x) - y)dx$ $A = \int_0^2 \frac{x}{e^{x-2}} dx = \int_0^2 xe^{2-x} dx$ $A = [H(x)]_0^2$ $A = H(2) - H(0)$ $A = (e^2 - 3)\ cm^2$	0.5